Esempio 1

Ricorrenza da risolvere

BASE $\quad T(1) = O(1)$

INDUZIONE $\quad T(n) = O(1) + T(n-1) \quad$ per $n > 1$

Procedimento

Sostituire $cf(n)$ a ciascun termine $O(f(n))$, dove c è una costante reale simbolica specifica per quel termine

$$\downarrow$$

BASE $\quad T(1) = a$

INDUZIONE $\quad T(n) = b + T(n-1) \quad$ per $n > 1$

Esempio 1 (cont.)

Metodo 1: provare a calcolare alcuni valori di T e, in base a essi, ipotizzare una soluzione

$$T(2) = b + a$$
$$T(3) = b + (b + a) = 2b + a$$
$$T(4) = b + (2b + a) = 3b + a$$
$$\vdots$$

Ipotesi: $T(n) = a + (n – 1)b$ asserto $S(n)$ da dimostrare per $n \geq 1$

Esempio 1 (cont.)

Dimostrazione per induzione dell'asserto $S(n) : T(n) = a + (n - 1)b$ per $n \geq 1$

BASE $n = 1$: $T(1) = a + 0 = a$ coincide con la BASE della definizione di $T(n) \rightarrow$ è vera

INDUZIONE $n > 1$: Si assume vero $S(n - 1)$ e si dimostra $S(n)$

$S(n - 1)$: $T(n - 1) = a + (n - 2)b$

Sostituendo questa espressione nella definizione $T(n) = b + T(n - 1)$, valida per $n > 1$, si ottiene $T(n) = b + a + (n - 2)b = a + (n - 1)b$

che coincide con $S(n)$, che pertanto è provato anche per $n > 1$

$$\downarrow$$

$$T(n) = a + (n - 1)b \qquad \text{vale per } n \geq 1$$

$$\downarrow$$

$$T(n) = O(n)$$

Esempio 1 (cont.)

Metodo 2 (alternativo al metodo 1): applicare sostituzioni successive finché si trova una relazione fra T(n) e T(k) per qualche k coperto dalla BASE della definizione di T(n)

$$T(n) = b + T(n-1)$$
$$T(n-1) = b + T(n-2)$$
$$T(n-2) = b + T(n-3)$$
$$:$$
$$T(2) = b + T(1)$$

$\downarrow$ (sostituzioni)

$T(n) = b + T(n-1) = b + b + T(n-2) = 2b + T(n-2)$

$T(n) = 2b + b + T(n-3) = 3b + T(n-3)$

:

$T(n) = (n-1)b + T(1) = a + (n-1)b$

Ipotesi: $T(n) = ib + T(n-i)$ asserto $S(i)$ da dimostrare per induzione per $1 \leq i \leq n-1$

Esempio 1 (cont.)

Dimostrazione per induzione dell'asserto $S(i)$:

$T(n) = ib + T(n - i)$ per $1 \le i \le n - 1$

BASE $i = 1$: l'asserto diventa $T(n) = b + T(n - 1)$ che coincide con l'INDUZIONE della definizione di $T(n) \rightarrow$ è vera

INDUZIONE $1 < i \le n - 1$: secondo la definizione $T(n) = b + T(n - 1)$, valida per $n > 1$, $T(n - i) = b + T(n - i - 1)$

Sostituendo questa espressione nell'asserto $S(i)$, che si assume vero, si ottiene

$T(n) = ib + T(n - i) = ib + b + T(n - i - 1) = (i + 1)b + T(n - (i + 1))$

che è $S(i + 1) \rightarrow$ il passo induttivo è così provato

$$\downarrow$$

per $i = n - 1$ l'asserto diventa $T(n) = (n - 1)b + T(1) = a + (n - 1)b$

$$\downarrow$$

$$T(n) = O(n)$$

Esempio 2

<u>Ricorrenza da risolvere</u>

BASE $\quad T(0) = O(1)$ e $T(1) = O(1)$

INDUZIONE $\quad T(n) = O(1) + T(n-2) \qquad$ per $n > 1$

<u>Procedimento</u>

BASE $\quad T(0) = a$ e $T(1) = b$

INDUZIONE $\quad T(n) = c + T(n-2) \qquad$ per $n > 1$

$$\downarrow$$

Esempio 2 (cont.)

Metodo 1

$$T(0) = a$$
$$T(1) = b$$
$$T(2) = c + T(0) = c + a$$
$$T(3) = c + T(1) = c + b$$
$$T(4) = c + T(2) = c + (c + a) = 2c + a$$
$$T(5) = c + T(3) = c + (c + b) = 2\,c + b$$
$$T(6) = c + T(4) = c + (2c + a) = 3c + a$$
$$:$$

Ipotesi (asserto da dimostrare per induzione, dimostrazione omessa):

$$\begin{cases} T(n) = cn/2 + a & \text{per n pari, } n \geq 0 \\ T(n) = c\lfloor n/2 \rfloor + b = c(n-1)/2 + b & \text{per n dispari, } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$T(n) = O(n)$$

Esempio 2 (cont.)

Metodo 2

$$T(n) = c + T(n-2)$$
$$T(n-2) = c + T(n-4)$$
$$T(n-4) = c + T(n-6)$$
$$:$$
$$T(3) = c + T(1)$$
$$T(2) = c + T(0)$$

$\downarrow$ (sostituzioni)

$$T(n) = c + T(n-2) = c + c + T(n-4) = 2c + T(n-4)$$
$$T(n) = 2c + (c + T(n-6)) = 3c + T(n-6)$$
$$:$$

Ipotesi: $T(n) = ic + T(n-2i)$ asserto $S(i)$ da dimostrare per induzione per $1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor$

Esempio 2 (cont.)

Dimostrazione per induzione dell'asserto S(i):

$T(n) = ic + T(n - 2i)$ per $1 \le i \le \lfloor n/2 \rfloor$

BASE i = 1: l'asserto diventa $T(n) = c + T(n - 2)$ che coincide con l'INDUZIONE della definizione di T(n) $\rightarrow$ è vera

INDUZIONE $1 < i \le \lfloor n/2 \rfloor$: secondo la definizione $T(n) = c + T(n - 2)$, valida per $n > 1$, $T(n - 2i) = c + T(n - 2i - 2)$

Sostituendo questa espressione nell'asserto S(i), che si assume vero, si ottiene

$T(n) = ic + T(n - 2i) = ic + c + T(n - 2i - 2) = (i + 1)c + T(n - 2(i + 1))$

che è S(i + 1) $\rightarrow$ il passo induttivo è così provato

$$\downarrow$$

per $i = \lfloor n/2 \rfloor$ l'asserto diventa

$$\begin{cases} T(n) = cn/2 + T(0) = cn/2 + a & \text{per n pari} \\ T(n) = c\lfloor n/2 \rfloor + T(1) = c(n - 1)/2 + b & \text{per n dispari} \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$T(n) = O(n)$$

Esempio 3

Ricorrenza da risolvere (è quella di MERGE-SORT)

BASE $T(1) = O(1)$
INDUZIONE $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$ per $n = 2^k, k > 0$

(il dominio di n è stato ridotto alle sole potenze di 2 per semplicità, in modo da dividere sempre in sottoliste di pari dimensioni)

Procedimento

BASE $T(1) = a$
INDUZIONE $T(n) = 2T(n/2) + bn$ per $n = 2^k, k > 0$

↓

Esempio 3 (cont.)

Metodo 1

$$T(1) = a$$
$$T(2) = 2T(1) + 2b = 2a + 2b$$
$$T(4) = 2T(2) + 4b = 2(2a + 2b) + 4b = 4a + 8b$$
$$T(8) = 2T(4) + 8b = 2(4a + 8b) + 8b = 8a + 24b$$
$$T(16) = 2T(8) + 16\,b = 2(8a + 24b) + 16\,b = 16\,a + 64\,b$$
$$\vdots$$

Ipotesi (asserto da dimostrare per induzione, dimostrazione omessa):

$$T(n) = na + bn\,lg\,n \qquad \text{per } n = 2^k,\ k \geq 0$$
$$\downarrow$$
$$T(n) = O(n\,lg\,n)$$

Esempio 3 (cont.)

Metodo 2

$$T(n) = 2T(n/2) + bn$$
$$T(n/2) = 2T(n/4) + bn/2$$
$$T(n/4) = 2T(n/8) + bn/4$$
$$\vdots$$
$$T(2) = 2T(1) + 2b$$
$$\downarrow \text{(sostituzioni)}$$

$$T(n) = 2T(n/2) + bn = 2(2T(n/4) + bn/2) + bn = 4T(n/4) + 2bn$$
$$T(n) = 4(2T(n/8) + bn/4) + 2bn = 8T(n/8) + 3bn$$
$$T(n) = 8(2T(n/16) + bn/8) + 3bn = 16T(n/16) + 4bn$$
$$\vdots$$
$$T(n) = nT(1) + bn\,lg n = na + bn\,lg n$$

Ipotesi: $T(n) = ibn + 2^i T(n/2^i)$ asserto $S(i)$ da dimostrare per induzione per $1 \leq i \leq \log_2 n$

Esempio 3 (cont.)

Dimostrazione per induzione dell'asserto S(i):
$T(n) = ibn + 2^i T(n/2^i)$ per $1 \leq i \leq \log_2 n$

BASE i = 1: l'asserto diventa $T(n) = 2T(n/2) + bn$ che coincide con l'INDUZIONE della definizione di T(n) $\rightarrow$ è vera

INDUZIONE $1 < i \leq \log_2 n$: secondo la definizione $T(n) = 2T(n/2) + bn$, valida per $n = 2^k$, $k > 0$, $T(n/2^i) = 2T(n/2^{i+1}) + bn/2^i$

Sostituendo questa espressione nell'asserto S(i), che si assume vero, si ottiene

$$T(n) = ibn + 2^i(2T(n/2^{i+1}) + bn/2^i) = bn(i + 1) + 2^{(i + 1)} T(n/2^{i+1})$$

che è S(i + 1) $\rightarrow$ il passo induttivo è così provato

$$\downarrow$$

per $i = \log_2 n$ l'asserto diventa $T(n) = bn \log_2 n + n\,T(1) = bn \log_2 n + na$

$$\downarrow$$

$$T(n) = O(n\,lg\,n)$$

Esempio 4

Ricorrenza da risolvere

BASE	$T(1) = O(1)$	
INDUZIONE	$T(n) = T(n - 1) + O(g(n))$	per $n > 1$

Procedimento

BASE	$T(1) = a$	
INDUZIONE	$T(n) = T(n - 1) + b\, g(n)$	per $n > 1$

$\downarrow$

Esempio 4 (cont.)

$$T(n) = T(n-1) + b\, g(n)$$
$$T(n-1) = T(n-2) + b\, g(n-1)$$
$$T(n-2) = T(n-3) + b\, g(n-2)$$
$$\vdots$$
$$T(2) = T(1) + b\, g(2) = a + b\, g(2)$$

↓ (sostituzioni)

$$T(n) = T(n-1) + b\, g(n) = T(n-2) + b\, g(n-1) + b\, g(n)$$
$$T(n) = T(n-3) + b\, g(n-2) + b\, g(n-1) + b\, g(n)$$
$$\vdots$$

Ipotesi: $T(n) = T(n-i) + b \displaystyle\sum_{j=0}^{i-1} g(n-j)$

asserto S(i) da dimostrare per induzione per $1 \le i \le n-1$

Esempio 4 (cont.)

Dimostrazione per induzione dell'asserto S(i):

$$T(n) = T(n-i) + b \sum_{j=0}^{i-1} g(n-j)$$

per $1 \le i \le n - 1$

BASE $i = 1$:
l'asserto diventa $T(n) = T(n-i) + b \sum_{j=0}^{0} g(n-j)$ $= T(n-1) + b\, g(n)$

che coincide con l'INDUZIONE della definizione di T(n) $\rightarrow$ è vera

Esempio 4 (cont.)

INDUZIONE $1 < i \le n - 1$: secondo la definizione $T(n) = T(n-1) + b\, g(n)$, valida per $n > 1$, $T(n-i) = T(n-i-1) + b\, g(n-i)$

Sostituendo questa espressione nell'asserto S(i), che si assume vero, si ottiene

$$T(n) = T(n-i) + b \sum_{j=0}^{i-1} g(n-j) = T(n-i-1) + b\, g(n-i) + b \sum_{j=0}^{i-1} g(n-j) =$$

$$T(n-(i+1)) + b \sum_{j=0}^{i} g(n-j)$$ che è $S(i+1)$ $\rightarrow$ il passo induttivo è provato

$\rightarrow$ per $i = n - 1$ l'asserto $T(n) = T(n-i) + b \sum_{j=0}^{i-1} g(n-j)$ diventa

$$T(n) = T(1) + b \sum_{j=0}^{n-2} g(n-j) = a + b \sum_{j=0}^{n-2} g(n-j)$$

$$\rightarrow \quad T(n) = O\left(\sum_{j=0}^{n-2} g(n-j) \right)$$

Esempio 5 (Risoluzione per tentativi)

Ricorrenza da risolvere

BASE $T(1) = a$
INDUZIONE $T(n) = 2T(n/2) + bn$ per $n = 2^k, k > 0$

Procedimento

TENTATIVO: dimostrare l'asserto S(n): $T(n) \le c\, n \log_2 n + d$ per $n = 2^k, k \ge 0$

BASE $n = 1$: l'asserto diventa $T(1) \le d$
Sostituendo nella disequazione la BASE della definizione di T(n) si ottiene $a \le d \rightarrow$ la BASE è dimostrata se $a \le d$ (VINCOLO)

Esempio 5 (cont.)

INDUZIONE $n > 1$: Si assume vero $S(n/2)$, cioè $T(n/2) \leq c\, n/2 \log_2 n/2 + d$
Sostituendo $S(n/2)$ nel passo induttivo della definizione di $T(n)$ si ottiene
$T(n) = 2T(n/2) + b\, n \leq c\, n \log_2 n/2 + 2d + b\, n = c\, n \log_2 n + n(b - c) + 2d$

$S(n)$: $T(n) \leq c\, n \log_2 n + d$ è provato se
$c\, n \log_2 n + n(b - c) + 2d \leq c\, n \log_2 n + d \rightarrow n(b - c) + d \leq 0$
$\rightarrow$ l'INDUZIONE è dimostrata se, per $n > 1$, $n(b - c) + d \leq 0$ (VINCOLO)

Il primo VINCOLO sussume la condizione $d > 0$, per cui il caso peggiore del secondo vincolo si ha per $n = 1 \rightarrow c - b \geq d$

I due vincoli ammettono soluzione (ad es. $d = a$, $c = a + b$) $\rightarrow$ al termine del TENTATIVO possiamo concludere che $S(n)$: $T(n) \leq c\, n \log_2 n + d$ è vero

$$\downarrow$$

$$T(n) = O(n\, lg n)$$

Esempio 6 (Risoluzione per tentativi)

Ricorrenza da risolvere

BASE $T(1) = 3$

INDUZIONE $T(n) = (2^{n/2} + 1)T(n/2)$ per $n > 1$

Procedimento

$$
\begin{aligned}
T(n) &= (2^{n/2} + 1)T(n/2) \\
T(n/2) &= (2^{n/4} + 1)T(n/4) \\
T(n/4) &= (2^{n/8} + 1)T(n/8) \\
&\vdots \\
T(2) &= (2^{1} + 1)T(1) = 3 * 3 = 9
\end{aligned}
$$

$\downarrow$ (sostituzioni)

$$T(n) = (2^{n/2} + 1)T(n/2) = (2^{n/2} + 1)\,(2^{n/4} + 1)T(n/4)$$

$$T(n) = (2^{n/2} + 1)\,(2^{n/4} + 1)\,(2^{n/8} + 1)T(n/8)$$

:

Esempio 6 (cont.)

$$\downarrow$$

Ipotesi: $T(n) = T(n/2^i) \prod_{j=1}^{i} \left(2^{\frac{n}{2^j}} + 1 \right)$

per $1 \leq i \leq \log_2 n$ (asserto S(i) da dimostrare, dimostrazione omessa)

Ipotesi alternativa:

$$T(n) = T(1) \prod_{j=1}^{\log_2 n} \left(2^{\frac{n}{2^j}} + 1 \right) \leq T(1) \cdot 2^{n \sum_{j=1}^{\log_2 n} \frac{1}{2^j}} \leq 3 \cdot 2^{n-1}$$

per $n \geq 1$

trascuro questo termine

Esempio 6 (cont.)

TENTATIVO I

Tentiamo di dimostrare l'asserto S(n): $T(n) \leq c \cdot 2^n$ per $n \geq 1$

BASE n = 1: l'asserto diventa $T(1) \leq 2c$
Sostituendo nella disequazione la BASE della definizione di T(n) si ottiene $3 \leq 2c \rightarrow$ la BASE è dimostrata se $c \geq 3/2$ (VINCOLO)

INDUZIONE n > 1: Si suppone sia vero S(n/2), cioè $T(n/2) \leq c \cdot 2^{n/2}$
Sostituendo S(n/2) nel passo induttivo della definizione di T(n), valido per n > 1, si ottiene $T(n) = (2^{n/2} + 1)T(n/2) \leq (2^{n/2} + 1)\, c \cdot 2^{n/2} = c \cdot 2^n + c \cdot 2^{n/2}$

Sostituendo questa espressione di T(n) in S(n) si ottiene $c \cdot 2^n + c \cdot 2^{n/2} \leq c \cdot 2^n$
$\rightarrow$ S(n) e, quindi, il passo induttivo sono provati se

$c \cdot 2^{n/2} \leq 0 \rightarrow c \leq 0$ (VINCOLO)

Esempio 6 (cont.)

I due vincoli non ammettono alcuna soluzione $\rightarrow$ al termine di TENTATIVO I <u>non</u> possiamo concludere che S(n): $T(n) \leq c \cdot 2^n$ è vero

Esempio 6 (cont.)

TENTATIVO II

Tentiamo di dimostrare l'asserto $S(n)$: $T(n) \le c \cdot 2^n + d$ per $n \ge 1$

BASE $n = 1$: l'asserto diventa $T(1) \le 2c + d$
Sostituendo nella disequazione la BASE della definizione di $T(n)$ si ottiene $3 \le 2c + d \rightarrow$ la BASE è dimostrata se $3 \le 2c + d$ (VINCOLO)

INDUZIONE $n > 1$: Si suppone sia vero $S(n/2)$, cioè $T(n/2) \le c \cdot 2^{n/2} + d$
Sostituendo $S(n/2)$ nel passo induttivo della definizione di $T(n)$, valido per $n > 1$, si ottiene

$$T(n) = (2^{n/2} + 1)T(n/2) \le (2^{n/2} + 1)\,(c \cdot 2^{n/2} + d) = c \cdot 2^n + d \cdot 2^{n/2} + c \cdot 2^{n/2} + d$$

Sostituendo questa espressione di $T(n)$ in $S(n)$ si ottiene

$$c \cdot 2^n + (c + d)\, 2^{n/2} + d \le c \cdot 2^n + d$$

$\rightarrow$ $S(n)$ e, quindi, il passo induttivo sono provati se $c + d \le 0$ (VINCOLO)

Esempio 6 (cont.)

I due vincoli ammettono soluzione (ad es. $c = 3$, $d = -3$) $\rightarrow$ al termine di TENTATIVO II possiamo concludere che $S(n)$: $T(n) \leq c \cdot 2^n + d$ è vero

$$\downarrow$$

$$T(n) = O(2^n)$$

Esempio 7 (Metodo principale)

Ricorrenza da risolvere

$T(n) = 9T(n/3) + n$

Procedimento

Si ha a = 9, b = 3 ($\rightarrow n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = n^2$), f(n) = n

- $n^{\log_b a} / f(n) = n^2 / n = n \rightarrow$ f(n) è asintoticamente più piccola di $n^{\log_b a}$
- lo è in modo polinomiale perché il rapporto fra la funzione di ordine di grandezza maggiore e quella di ordine di grandezza minore è un termine contenente n^{ε}, per qualche $\varepsilon > 0$

$$\downarrow$$

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^2)$$

Esempio 8 (Metodo principale)

Ricorrenza da risolvere

$T(n) = T(2n/3) + 1$

Procedimento

Si ha $a = 1$, $b = 3/2$ ($\rightarrow n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1$), $f(n) = 1$

$f(n)$ e $n^{\log_b a}$ hanno lo stesso ordine di grandezza $\Theta(1)$

$$\downarrow$$

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}\ lg n) = \Theta(lg n)$$

Esempio 9 (Metodo principale)

Ricorrenza da risolvere

$T(n) = 3T(n/4) + n \log_2 n$

Procedimento

Si ha a = 3, b = 4 ($\rightarrow n^{\log_b a} = n^{\log_4 3}$), $f(n) = n \log_2 n$

- $f(n) / n^{\log_b a} = n \log_2 n / n^{\log_4 3} = n^{1-\log_4 3} \log_2 n \rightarrow$ f(n) è asintoticamente più grande di $n^{\log_b a}$
- lo è in modo polinomiale
- vale la condizione di regolarità $af(n/b) < cf(n)$ per qualche costante $c < 1$, infatti
  $3\, n/4 \log_2 n/4 < c\, n \log_2 n$ per $c = ¾$e $\forall n$ sufficientemente grande

$$\downarrow$$

$$T(n) = \Theta(f(n))= \Theta(n\,lg n)$$

Esempio 10 (Metodo principale)

Ricorrenza da risolvere

$T(n) = 2T(n/2) + n \log_2 n$

Procedimento

Si ha a = 2, b = 2 ($\rightarrow n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n$), $f(n) = n \log_2 n$

- $f(n) / n^{\log_b a} = n \log_2 n / n = \log_2 n \rightarrow f(n)$ è asintoticamente più grande di $n^{\log_b a}$
- non lo è in modo polinomiale perché il rapporto fra la funzione di ordine di grandezza maggiore e quella di ordine di grandezza minore non è un termine contenente n^{ε}, per qualche $\varepsilon > 0$

$$\downarrow$$

il teorema principale non è applicabile

Esempio 10 (cont.)

È però applicabile l'estensione del teorema principale perché

- f(n) è asintoticamente più grande di $n^{\log_b a}$
- per k = 1, f(n) = $\Theta(n^{\log_b a} \lg^k n)$ cioè $n \log_2 n = \Theta(n\, lg n)$

$$\downarrow$$

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^{k+1} n) = \Theta(n\, lg^2 n)$$

Esempio 11 (Metodo principale)

Ricorrenza da risolvere

$T(n) = 27T(n/3) + \Theta(n^3/lgn)$

Procedimento

Si ha a = 27, b = 3 ($\rightarrow n^{\log_b a} = n^{\log_3 27} = n^3$), $f(n) = \Theta(n^3/lgn)$

- $n^{\log_b a} / f(n) = n^3 / n^3/lgn = lgn \rightarrow$ f(n) è asintoticamente più piccola di $n^{\log_b a}$
- non lo è in modo polinomiale
- $\nexists\ k \geq 0 \mid f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^k n)$

$$\downarrow$$

né il teorema principale, né la sua estensione sono applicabili