QUICKSORT e RANDOMIZED-QUICKSORT: analisi del caso pessimo

(RANDOMIZED-)PARTITION

$$T(n) = \max_{1 \le q \le n-1} (T(q)+T(n-q)) + \Theta(n)$$

<u>Determinazione del limite superiore</u>

Ipotesi: $T(n) \le c\, n^2$ per qualche costante $c > 0$

Sostituendo l'ipotesi nella definizione di T(n), si ottiene

$$T(n) \le \max_{1 \le q \le n-1} (c\, q^2 + c\, (n-q)^2) + \Theta(n) = c \cdot \max_{1 \le q \le n-1} (q^2 + (n-q)^2) + \Theta(n)$$

$f(q) = q^2 + (n-q)^2$ nell'intervallo $1 \le q \le n-1$ assume valore massimo in ciascuno dei due estremi (è una parabola con concavità rivolta verso l'alto e vertice nel punto di ascissa $q = n/2$, rispetto a cui i due estremi dell'intervallo sono simmetrici) $\rightarrow$

$$\max_{1 \le q \le n-1} (q^2 + (n-q)^2) = 1^2 + (n-1)^2 = n^2 - 2(n-1)$$

QUICKSORT e RANDOMIZED-QUICKSORT: analisi del caso pessimo (cont.)

Quindi l'ipotesi è dimostrata. Infatti

$$T(n) \leq c(n^2 - 2(n-1)) + \Theta(n) = c\, n^2 - 2c(n-1) + \Theta(n) \leq c\, n^2$$

perché, per ogni funzione $\Theta(n)$, è sempre possibile fissare un valore di c sufficientemente grande tale che $2c(n-1) \geq \Theta(n)$

$$\downarrow$$

$$T(n) = O(n^2)$$

QUICKSORT e RANDOMIZED-QUICKSORT: analisi del caso pessimo (cont.)

Determinazione del limite inferiore

Ipotesi: $T(n) \geq c\, n^2$ per qualche costante $c > 0$
(N.B. questa c non è la stessa usata per la determinazione del limite inferiore)

Si procede come per la determinazione del limite inferiore (ogni $\leq$ diventa $\geq$). Alla fine

$$T(n) \geq c\, n^2 - 2c(n-1) + \Theta(n) \geq c\, n^2$$

è verificata perché, per ogni funzione $\Theta(n)$, è sempre possibile fissare un valore di c sufficientemente piccolo ma positivo tale che asintoticamente
$2c(n-1) \leq \Theta(n)$

QUICKSORT e RANDOMIZED-QUICKSORT: analisi del caso pessimo (cont.)

Infatti, per la definizione della notazione Θ, $\Theta(n) \geq a \cdot n$, con a costante reale positiva e $n \geq n_0$. Quindi $2c(n - 1) \leq \Theta(n)$ è soddisfatta se $2c(n - 1) \leq a \cdot n \rightarrow$ $n(a - 2c) + 2c \geq 0 \rightarrow c \leq a/2$

$$\downarrow$$

$$T(n) = \Omega(n^2)$$

<u>Limite asintotico stretto</u>

$T(n) = O(n^2) \wedge T(n) = \Omega(n^2) \rightarrow T(n) = \Theta(n^2)$

RANDOMIZED-QUICKSORT: analisi del caso medio

RANDOMIZED-PARTITION

$$T(n) = \frac{1}{n}\Bigg(\underbrace{T(1)+T(n-1)}_{\text{CASO 1}}+\underbrace{\sum_{q=1}^{n-1}\big(T(q)+T(n-q)\big)}_{\text{CASO 2 } (n \geq 2)}\Bigg)+\Theta(n)$$

Poiché, dall'analisi del caso pessimo

$$\frac{1}{n}\big(T(1)+T(n-1)\big)=\frac{1}{n}\big(\Theta(1)+\Theta(n^2)\big)=\Theta(n) \longrightarrow$$

$$T(n) = \frac{1}{n}\sum_{q=1}^{n-1}\big(T(q)+T(n-q)\big)+\Theta(n)=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}T(k)+\Theta(n)$$

RANDOMIZED-QUICKSORT: analisi del caso medio (cont.)

Determinazione del limite superiore

Ipotesi: T(n) ≤ a n *lg* n + b per qualche costante a > 0, b > 0 (b ≥ T(1))
Sostituendo l'ipotesi nella definizione di T(n), si ottiene

$$T(n) = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1} T(k) + \Theta(n) \le \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(ak\lg k + b) + \Theta(n) = \frac{2a}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k\lg k + \frac{2b}{n}(n-1) + \Theta(n)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k\lg k \le \frac{1}{2}n^2\lg n - \frac{1}{8}n^2$$

$$T(n) \le \frac{2a}{n}\left(\frac{1}{2}n^2\lg n - \frac{1}{8}n^2\right) + \frac{2b}{n}(n-1) + \Theta(n) \le an\lg n - \frac{a}{4}n + 2b + \Theta(n)$$

$$= an\lg n + b + \left(\Theta(n) + b - \frac{a}{4}n\right) \le an\lg n + b$$

Per a sufficientemente grande cosicché an/4 superi Θ(n) + b

RANDOMIZED-QUICKSORT: analisi del caso medio (cont.)

$$\downarrow$$
$$T(n) = O(n\,lg\,n)$$

Determinazione del limite inferiore

Si dimostra che $T(n) = \Omega(n\,lg\,n)$

Digressione: limite della sommatoria

Si dimostra che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k \lg k \le \frac{1}{2}n^2 \lg n - \frac{1}{8}n^2$ come segue

$lg\text{k} \le lg(\text{n}/2) = lg\text{n} - 1$ $\qquad$ $lg\text{k} \le lg\text{n}$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \lg k = \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil -1} k \lg k + \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} k \lg k \le (\lg n - 1)\sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil -1} k + \lg n \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} k = \lg n \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil -1} k$$

$$\le \frac{1}{2} n(n-1) \lg n - \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2} - 1\right)\frac{n}{2} \le \frac{1}{2} n^2 \lg n - \frac{1}{8} n^2 \qquad \text{per n} \ge 2$$