

Informazione binaria:

- rappresentazione di valori logici -

Percorso di Preparazione agli Studi di Ingegneria

Università degli Studi di Brescia

Docente: Massimiliano Giacomini

Tipologie di codici

Nel seguito vedremo tipologie di rappresentazioni diverse:

- Senza assumere limitazioni sul numero di bit a disposizione:
per numeri [notazione binaria, ovvero posizionale con base 2]
- Disponendo di un numero di bit limitato:
 - numeri naturali
 - interi relativi [valore assoluto e segno, complemento a due]
 - “reali” [virgola fissa e virgola mobile]
 - valori logici, caratteri alfabetici, testi
 - suoni, immagini e sequenze video
 - codici per la rilevazione e correzione di errori
- Codici di compressione (senza | con perdita)

I problemi

- Talvolta è necessario rappresentare un fatto *vero* o *falso*

Un ipotetico esempio (in un linguaggio simile al C):

```
if(età >=18)
    è_maggiorenne="vero";
else è_maggiorenne="falso";
```

- I fatti possono essere composti a partire da altri fatti mediante congiunzione, disgiunzione, negazione, ...

“*ho_l’automobile e ho_la_benzina*”

“*ho_l’automobile o ho_la_bicicletta*”

“**non** *ho_l’automobile*”

- Il loro “valore di verità” dipende da quello dei fatti elementari

I problemi (continua)

- Fatti espressi in forma diversa possono indicare in realtà il medesimo fatto

“**Non** (*ho_l’automobile e ho_la_bicicletta*)”

“(Non *ho_l’automobile*) **o** (Non *ho_la_bicicletta*)”

- Per risolvere questi problemi, dobbiamo introdurre alcuni concetti:
 - valore di verità
 - variabile booleana
 - operatori e formule booleane
 - algebra di Boole

Codifica binaria di valori logici

Valore logico: esprime il “valore di verità” di un determinato fatto

Esempi

- Il voto del mio compito di informatica A è sufficiente (F1)
- Una squadra di pallavolo in campo è costituita da 6 giocatori (F2)

Il fatto F1 è **vero** oppure **falso**, non entrambi (lo stesso per F2)

Codifica binaria di valori logici

Valore logico: esprime il “valore di verità” di un determinato fatto

Esempi

- Il voto del mio compito di informatica A è sufficiente (F1)
- Una squadra di pallavolo in campo è costituita da 6 giocatori (F2)

Il fatto F1 è **vero** oppure **falso**, non entrambi (lo stesso per F2)

NB: esistono fatti che possono essere non “completamente veri”
nè “completamente falsi”, ma noi non ce ne occupiamo

Es: Paperino è alto - Beckham è un giocatore da Milan

Codifica binaria di valori logici

Problema

Dato un fatto, dobbiamo codificare i suoi possibili valori logici.

➡ 2 “oggetti” da rappresentare
V (vero) F (falso)

Codifica binaria di valori logici

Problema

Dato un fatto, dobbiamo codificare i suoi possibili valori logici.

➡ 2 “oggetti” da rappresentare

V (vero) F (falso)

➡ E' quindi sufficiente **1 bit**, ad esempio con la codifica:

- falso: 0

- vero: 1

Codifica binaria di valori logici

Problema

Dato un fatto, dobbiamo codificare i suoi possibili valori logici.

➡ 2 “oggetti” da rappresentare

V (vero) F (falso)

➡ E' quindi sufficiente **1 bit**, ad esempio con la codifica:

- falso: 0

- vero: 1

- A volte sono disponibili più bit (ad esempio 8) e sono possibili diverse convenzioni, ad esempio nel linguaggio C si usa un intero (a 8 o più bit):
 - **Falso: 0; Vero: qualsiasi valore diverso da 0**

Variabile booleana

- Così come si usano variabili “numeriche” per memorizzare valori numerici (es. *temperatura_aria*) in modo simile si possono usare **variabili booleane** per memorizzare il valore di verità di un fatto

Esempio: uso una variabile *F1* per il fatto che il compito sia suff.
se $(voto \geq 18)$ allora ***F1*** = V

Definizione

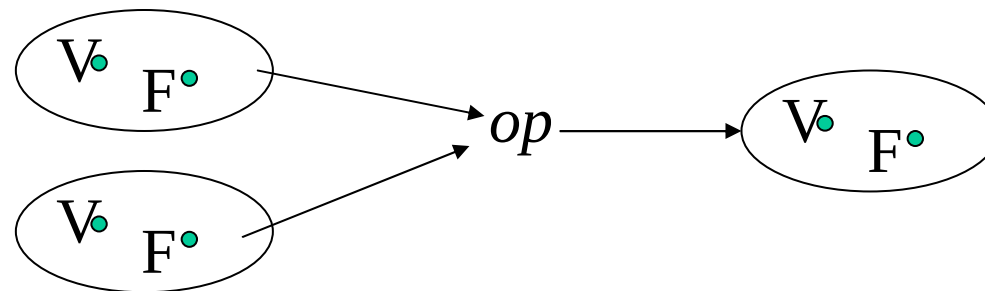
- Variabile booleana: **variabile binaria** che può assumere uno dei due valori logici denotati con 0 e 1 (oppure *Falso* e *Vero*)

 DOMINIO: $\{0, 1\}$ (oppure: $\{F, V\}$)

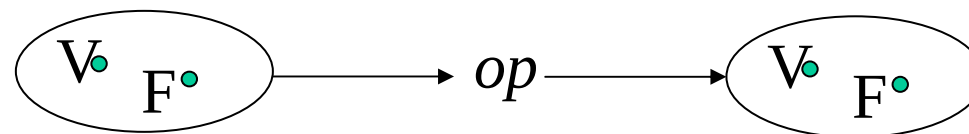
Operatori booleani

- Così come per le variabili numeriche esistono operatori aritmetici (es: +, -, *, ...), allo stesso modo per le variabili booleane esistono operatori booleani

OPERATORI BINARI (due argomenti)



OPERATORI UNARI (un argomento)



Operatori booleani più importanti

NOT	Negazione Logica	➡ $not(x), \bar{x}, \sim x$
AND	Prodotto Logico	➡ $x \text{ and } y, x \bullet y, xy$
OR	Somma Logica	➡ $x \text{ or } y, x + y$

Tabelle di verità (NB: 0 equivale a F, 1 equivale a T)

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

NOT

x_1	x_0	$x_1 \bullet x_0$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

AND

x_1	x_0	$x_1 + x_0$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

OR

Formule (o espressioni) booleane

Esempi:

$$x + y \qquad ((\overline{x+y}) \cdot z)$$

Definizione:

1. Le **costanti 0** e **1** e le **variabili** (simboli a cui possono essere associati i valori 0 e 1) sono formule booleane
2. Se E , E_1 ed E_2 sono formule booleane lo sono anche $(E_1 + E_2)$, $(E_1 \cdot E_2)$ e $(\overline{E})$
3. Non esistono altre formule oltre a quelle che possono essere generate da un numero finito di applicazioni delle regole 1 e 2

Equivalenza di formule booleane

Formule equivalenti: per ogni combinazione di valori delle variabili
le formule restituiscono lo stesso valore

Un modo per verificare l'equivalenza: tabella di verità

ESEMPIO 1

$$\overline{auto \cdot bici} = \overline{auto} + \overline{bici}$$

<i>auto</i>	<i>bici</i>	<i>auto · bici</i>	$\overline{auto \cdot bici}$	$\overline{auto}$	$\overline{bici}$	$\overline{auto} + \overline{bici}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

ESEMPIO 2

Assorbimento: $x(x+y) = x$

x	y	$x+y$	$x(x+y)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1



NB: potevamo usare anche una diversa simbologia per i valori...

Assorbimento: $x(x + y) = x$

x	y	$x+y$	$x(x+y)$
F	F	F	F
F	V	V	F
V	F	V	V
V	V	V	V



...o per gli operatori

Assorbimento: $x \text{ AND } (x \text{ OR } y) = x$

x	y	$x \text{ OR } y$	$x \text{ AND } (x \text{ OR } y)$
F	F	F	F
F	V	V	F
V	F	V	V
V	V	V	V



ESEMPIO 3

$$X_1 + X_2 + X_2X_3 + \overline{X_2}X_3 = X_1 + X_2 + X_3$$

X_3	X_2	X_1	$\overline{X_2}$	X_2X_3	$\overline{X_2}X_3$	$X_1+X_2+X_2X_3+\overline{X_2}X_3$	$X_1+X_2+X_3$
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1

Algebra di Boole

- Algebra: insieme di supporto (i valori utilizzati) e l'insieme degli operatori fondamentali (devono essere chiusi rispetto all'insieme di supporto)

Es: $(\mathbb{Z}, \{+, -\})$ è un'algebra, $(\mathbb{N}, \{+, -\})$ non lo è

- **Algebra di Boole**: un particolare tipo di **algebra** che include:
 - un insieme di supporto **A** (l'insieme **{0,1}** o **{V,F}**)
 - due operatori binari: **AND** ($\cdot$) e **OR** ($+$)
 - un operatore unario: **NOT** ($\bar{}$)

[operatori soddisfano **proprietà** dedotte da un insieme di **assiomi**]

- E' lo **strumento matematico** su cui si fonda il funzionamento dei circuiti digitali

Assiomi dell'algebra di Boole

Forma AND

Forma OR

Commutatività $AB = BA$

$A+B = B+A$

Distributività $A+BC=(A+B)(A+C)$ $A(B+C)=AB+AC$

Identità $1A = A$

$0+A = A$

Inverso $A\bar{A} = 0$

$A+\bar{A} = 1$

Proprietà dell'algebra di Boole

	Forma AND	Forma OR
Elemento nullo	$0A = 0$	$1+A = 1$
Idempotenza	$AA = A$	$A+A = A$
Assorbimento	$A(A+B) = A$	$A+AB=A$
Associatività	$(AB)C=A(BC)$	$(A+B)+C=A+(B+C)$
De Morgan	$\overline{AB} = \overline{A}+\overline{B}$	$\overline{A+B} = \overline{A} \overline{B}$

Altre proprietà della negazione logica

- $\overline{\overline{1}} = 1$
- $\overline{\overline{0}} = 0$

Equivalenza tra formule booleane via algebra di Boole

- ESEMPIO 1 precedente

$$\overline{\text{auto} \cdot \text{bici}} = \overline{\text{auto}} + \overline{\text{bici}} \quad \text{direttamente dalla proprietà di De Morgan}$$

- ESEMPIO 3 precedente

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + \overline{X_2}X_3 + X_2X_3 &= X_1 + X_2 + X_3(X_2 + \overline{X_2}) \\ &= X_1 + X_2 + X_3 \end{aligned}$$

- ALTRO ESEMPIO

$$\begin{aligned} X_1X_2 + X_1X_2X_3 + X_1X_2 &= X_1X_2 + X_1X_2X_3 \\ &= X_1X_2(1 + X_3) = X_1X_2 \end{aligned}$$

ESERCIZI PROPOSTI

- Costruire le *tabelle di verità* delle seguenti formule booleane:
 1. $(x + y) + \overline{(xy)}$ che è equivalente a scrivere
 $(x \text{ OR } y) \text{ OR NOT}(x \text{ AND } y)$
 2. $\overline{((x + z) + y) + (xz)}$ che è equivalente a scrivere
 $\text{NOT } ((x \text{ OR } z) \text{ OR } y) \text{ OR } (x \text{ AND } z)$
- Usando gli assiomi e le proprietà dell'algebra di Boole dimostrare le seguenti equivalenze di formule booleane:
 1. $xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x = x$
 2. $x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y} = \bar{x} + \bar{y}$