

Tipologie di codici

Nel seguito vedremo tipologie di rappresentazioni diverse:

- Senza assumere limitazioni sul numero di bit a disposizione:
per numeri [notazione binaria, ovvero posizionale con base 2]
- Disponendo di un numero di bit limitato:
 - numeri naturali
 - interi relativi [valore assoluto e segno, complemento a due]
 - “reali” [virgola fissa e virgola mobile]
 - valori logici, caratteri alfabetici, testi
 - suoni, immagini e sequenze video
 - codici per la rilevazione e correzione di errori
- Codici di compressione (senza | con perdita)

Codifica binaria di valori logici

Valore logico: esprime il “valore di verità” di un determinato fatto

Esempi

- Il voto del mio compito di informatica A è sufficiente (F1)
- Una squadra di pallavolo in campo è costituita da 6 giocatori (F2)

Il fatto F1 è *vero* oppure *falso*, non entrambi (lo stesso per F2)

Codifica binaria di valori logici

Valore logico: esprime il “valore di verità” di un determinato fatto

Esempi

- Il voto del mio compito di informatica A è sufficiente (F1)
- Una squadra di pallavolo in campo è costituita da 6 giocatori (F2)

Il fatto F1 è *vero* oppure *falso*, non entrambi (lo stesso per F2)

NB: esistono fatti che possono essere non “completamente veri”
nè “completamente falsi”, ma noi non ce ne occupiamo

Es: Paperino è alto - Beckham è un giocatore da Milan

Codifica binaria di valori logici

Problema

Dato un fatto, dobbiamo codificare i suoi possibili valori logici.

➡ 2 “oggetti” da rappresentare

V (vero) F (falso)

Codifica binaria di valori logici

Problema

Dato un fatto, dobbiamo codificare i suoi possibili valori logici.

➡ 2 “oggetti” da rappresentare

V (vero) F (falso)

➡ E' quindi sufficiente **1 bit**, ad esempio con la codifica:

- falso: 0

- vero: 1

Codifica binaria di valori logici

Problema

Dato un fatto, dobbiamo codificare i suoi possibili valori logici.

➡ 2 “oggetti” da rappresentare

V (vero) F (falso)

➡ E' quindi sufficiente **1 bit**, ad esempio con la codifica:

- falso: 0

- vero: 1

- A volte sono disponibili più bit (ad esempio 8) e sono possibili diverse convenzioni, ad esempio nel linguaggio C si usa un intero (a 8 o più bit):
 - **Falso: 0; Vero: un valore intero > 0**

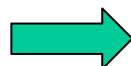
Variabile booleana

- Così come si usano variabili “numeriche” per memorizzare valori numerici (es. *temperatura_aria*) in modo simile si possono usare *variabili booleane* per memorizzare il valore di verità di un fatto

Esempio: uso una variabile *F1* per il fatto che il compito sia suff.
se $(voto \geq 18)$ allora $F1 = V$

Definizione

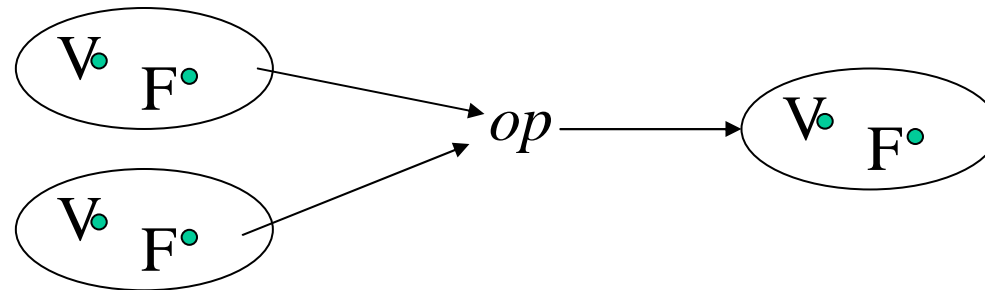
- Variabile booleana: *variabile binaria* che può assumere uno dei due valori logici denotati con 0 e 1 (oppure *Falso* e *Vero*)

 DOMINIO: $\{0, 1\}$ (oppure: $\{F, V\}$)

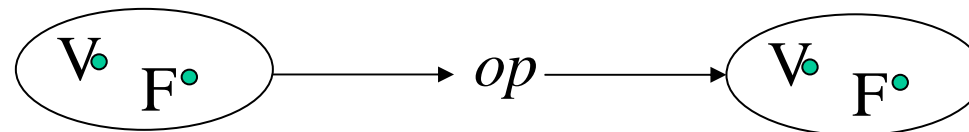
Operatori booleani

- Così come per le variabili numeriche esistono operatori aritmetici (es: +, -, *, ...), allo stesso modo per le variabili booleane esistono operatori booleani

OPERATORI BINARI (due argomenti)



OPERATORI UNARI (un argomento)



Algebra di Boole

- Algebra: insieme di supporto (i valori utilizzati) e l'insieme degli operatori fondamentali (devono essere chiusi rispetto all'insieme di supporto)

Es: $(\mathbb{Z}, \{+, -\})$ è un'algebra, $(\mathbb{N}, \{+, -\})$ non lo è

- Algebra di Boole*: un particolare tipo di **algebra** che include:
 - un insieme di supporto **A** (l'insieme **{0,1}** o **{V,F}**)
 - due operatori binari: **AND** (\cdot) e **OR** ($+$)
 - un operatore unario: **NOT** ($-$)

[operatori soddisfano **proprietà** dedotte da un insieme di **assiomi**]

- E' lo **strumento matematico** su cui si fonda il funzionamento dei circuiti digitali

Operatori dell'algebra di Boole

NOT	Negazione Logica	➡ $not(x), \bar{x}, \sim x$
AND	Prodotto Logico	➡ $x \text{ and } y, x \bullet y, xy$
OR	Somma Logica	➡ $x \text{ or } y, x + y$

Tabelle di verità

x_1	x_0	$x_1 \bullet x_0$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

AND

x_1	x_0	$x_1 + x_0$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

OR

x	\bar{x}
0	1
1	0

NOT

Assiomi dell'algebra di Boole

Forma AND

Forma OR

Commutatività $AB = BA$

$A+B = B+A$

Distributività $A+BC=(A+B)(A+C)$ $A(B+C)=AB+AC$

Identità $1A = A$

$0+A = A$

Inverso $A\bar{A} = 0$

$A+\bar{A} = 1$

Proprietà dell'algebra di Boole

	Forma AND	Forma OR
Elemento nullo	$0A = 0$	$1+A = 1$
Idempotenza	$AA = A$	$A+A = A$
Assorbimento	$A(A+B) = A$	$A+AB=A$
Associatività	$(AB)C=A(BC)$	$(A+B)+C=A+(B+C)$
De Morgan	$\overline{AB} = \overline{A}+\overline{B}$	$\overline{A+B} = \overline{A} \overline{B}$

Altre proprietà della negazione logica

- $\overline{\overline{1}} = 1$
- $\overline{\overline{0}} = 0$

Formule (o espressioni) booleane

Esempio:

$$x + y$$

Definizione:

1. Le **costanti 0 e 1** e le **variabili** (simboli a cui possono essere associati i valori 0 e 1) sono formule booleane
2. Se E , E_1 ed E_2 sono formule booleane lo sono anche $(E_1 + E_2)$, $(E_1 \cdot E_2)$ e (\overline{E})
3. Non esistono altre formule oltre a quelle che possono essere generate da un numero finito di applicazioni delle regole 1 e 2

Esempi

$$((\overline{x+y}) \cdot z)$$

$$((x_1 \cdot \overline{x_2}) + (x_3 \cdot (x_4 + \overline{x_5})))$$

Valgono le regole classiche di semplificazione delle parentesi e di priorità degli operatori:

$$((x_1 \cdot x_2) + (x_3 \cdot (x_4 + x_5))) \Rightarrow x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot (x_4 + x_5)$$

... e il simbolo “.” di solito si omette

Equivalenza di formule booleane

Formule equivalenti: per ogni combinazione di valori delle variabili le formule restituiscono lo stesso valore

Equivalenza fra formule booleane

Esempi

- $x_1x_2 + x_1\overline{x_2}x_3 = x_1(x_2 + \overline{x_2}x_3)$
- $x_1 + x_2 + x_2x_3 + \overline{x_2}x_3 = x_1 + x_2 + x_3(x_2 + \overline{x_2}) = x_1 + x_2 + x_3$
- $x_1x_2 + x_1x_2x_3 + x_1\overline{x_2}x_3 = x_1x_2 + x_1x_2x_3 = x_1x_2(1 + x_3) = x_1x_2$

Equivalenza fra formule booleane

Verifica tramite tabella

$$x_1 + x_2 + x_2x_3 + \overline{x_2}x_3 = x_1 + x_2 + x_3$$

x_3	x_2	x_1	$\overline{x_2}$	x_2x_3	$\overline{x_2}x_3$	$x_1+x_2+x_2x_3+\overline{x_2}x_3$	$x_1+x_2+x_3$
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1

Tabelle di verità e proprietà dell'Algebra di Boole: Esempio

Assorbimento: $x(x+y) = x$


x	y	$x+y$	$x(x+y)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1



NB: potevamo usare anche una diversa simbologia per i valori...

Assorbimento: $x(x + y) = x$

x	y	$x+y$	$x(x+y)$
F	F	F	F
F	V	V	F
V	F	V	V
V	V	V	V



...o per gli operatori

Assorbimento: $x \text{ AND } (x \text{ OR } y) = x$

x	y	$x \text{ OR } y$	$x \text{ AND } (x \text{ OR } y)$
F	F	F	F
F	V	V	F
V	F	V	V
V	V	V	V



Tabelle di verità e proprietà dell'Algebra di Boole: Esempio

Proprietà di De Morgan: $\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$

x	y	xy	\overline{xy}	\overline{x}	\overline{y}	$\overline{x} + \overline{y}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0



Esercizi proposti

- Costruire le *tabelle di verità* delle seguenti formule booleane:
 1. $(x + y) + \overline{(xy)}$ che è equivalente a scrivere $(x \text{ OR } y) \text{ OR } \text{NOT}(x \text{ AND } y)$
 2. $\overline{((x + z) + y) + (xz)}$ che è equivalente a scrivere $\text{NOT}((x \text{ OR } z) \text{ OR } y) \text{ OR } (x \text{ AND } z)$
- Usando gli assiomi e le proprietà dell'algebra di Boole dimostrare le seguenti equivalenze di formule booleane:
 1. $xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x = x$
 2. $x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y} = \bar{x} + \bar{y}$