

Algebra di Boole

Fondamenti di Informatica A

Percorso di Preparazione agli Studi di Ingegneria

Università degli Studi di Brescia

Dr.ssa Daniela Fogli

Algebra di Boole




- E' lo **strumento matematico** su cui si fonda il funzionamento dei circuiti digitali
- E' un particolare tipo di **algebra** che include:
 - un insieme di supporto **A** (l'insieme **{0,1}** o **{V,F}** nel ns caso)
 - degli operatori binari: **AND** (\cdot) e **OR** ($+$)
 - un operatore complemento: **NOT** (\neg)
- Gli operatori soddisfano certe **proprietà** che si deducono da un insieme di **assiomi**

Variabili booleane

- Una variabile booleana è una **variabile binaria** che può assumere uno dei due valori logici denotati con 0 e 1 (oppure *Falso* e *Vero*)
- Usiamo ad esempio i simboli x, y, z, A, B, \dots per indicare variabili booleane
- Può essere $x = 1$ oppure $x = 0$

Operatori booleani

- Operatori booleani (o logici) fondamentali:

NOT	Negazione Logica		$\text{not}(x), \bar{x}, \sim x$
AND	Prodotto Logico		$x \text{ and } y, x \cdot y, xy$
OR	Somma Logica		$x \text{ or } y, x + y$

Le 3 funzioni di base: Tabelle di verità

x_1	x_0	$x_1 \bullet x_0$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

AND

x_1	x_0	$x_1 + x_0$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

OR

x	\bar{x}
0	1
1	0

NOT

Assiomi dell'Algebra di Boole

Forma AND

Forma OR

Commutatività $AB = BA$

$A+B = B+A$

Distributività $A+BC=(A+B)(A+C)$ $A(B+C)=AB+AC$

Identità $1A = A$

$0+A = A$

Inverso $A\bar{A} = 0$

$A+\bar{A} = 1$

Proprietà dell'Algebra di Boole

Forma AND

Forma OR

Elemento nullo

$0A = 0$

$1+A = 1$

Idempotenza

$AA = A$

$A+A = A$

Assorbimento

$A(A+B) = A$

$A+AB=A$

Associatività

$(AB)C=A(BC)$

$(A+B)+C=A+(B+C)$

De Morgan

$\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$

$\overline{A+B} = \bar{A} \bar{B}$

Altre proprietà della negazione

- $\overline{\overline{1}} = 1$
- $\overline{\overline{0}} = 0$
- $\overline{\overline{\overline{0}}} = \overline{\overline{1}} = \overline{0} = 1$

Altre funzioni di base

x_1	x_0	$\overline{x_1 \cdot x_0}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NAND

x_1	x_0	$\overline{x_1 + x_0}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

NOR

Formule (espressioni) booleane (logiche)

1. Le **costanti 0 e 1** e le **variabili** (simboli a cui possono essere associati i valori 0 e 1) sono formule booleane
2. Se E , E_1 ed E_2 sono formule booleane lo sono anche $(E_1 + E_2)$, $(E_1 \cdot E_2)$ e (\overline{E})
3. Non esistono altre formule oltre a quelle che possono essere generate da un numero finito di applicazioni delle regole 1 e 2

Esempi di formule booleane

$$((\overline{x+y}) \cdot z)$$

$$((x_1 \cdot \overline{x_2}) + (x_3 \cdot (x_4 + \overline{x_5})))$$

Valgono le regole classiche di semplificazione delle parentesi e di priorità degli operatori:

$$((x_1 \cdot x_2) + (x_3 \cdot (x_4 + x_5))) \Rightarrow x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot (x_4 + x_5)$$

... e il simbolo “.” di solito si omette

Tabella di verità di un'espressione booleana

$$x_1 + x_2 + x_2 x_3 + \overline{x_2} x_3$$

x_3	x_2	x_1	$\overline{x_2}$	$x_2 x_3$	$\overline{x_2} x_3$	$x_1 + x_2 + x_2 x_3 + \overline{x_2} x_3$
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	1	0	1

Tabelle di verità e proprietà dell'Algebra di Boole: Esempio

Assorbimento: $x(x+y) \stackrel{?}{=} x$

x	y	$x+y$	$x(x+y)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1



Tabelle di verità e proprietà dell'Algebra di Boole: Esempio (2)

Assorbimento: $x(x+y) \stackrel{?}{=} x$

x	y	$x+y$	$x(x+y)$
F	F	F	F
F	V	V	F
V	F	V	V
V	V	V	V



Tabelle di verità e proprietà dell'Algebra di Boole: Esempio (3)

Assorbimento: $x \text{ AND } (x \text{ OR } y) \stackrel{?}{=} x$

x	y	$x \text{ OR } y$	$x \text{ AND } (x \text{ OR } y)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1



Esercizi

1. Date A e B variabili Booleane, si valuti tramite una tavola di verità la seguente espressione Booleana:
 $((\text{not } A) \text{ and } (\text{not } B)) \text{ or } A$
2. Date A, B e C variabili Booleane, si valuti tramite una tavola di verità la seguente espressione Booleana:
 $\text{not}(A \text{ or } B) \text{ and } ((\text{not } A) \text{ and } C)$